"Physics of Auroral Phenomena", Proc. XLIV Annual Seminar, Apatity, pp. 115-117, 2021

Polar Geophysical Institute

DOI: 10.51981/2588-0039.2021.44.026

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ 2D И 3D ПОДХОДОВ К УРАВНЕНИЮ МОДУЛЯЦИИ ГКЛ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

М.С. Калинин, М.Б. Крайнев, А.К. Свиржевская, Н.С. Свиржевский

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, г. Москва, Россия; e-mail: *kalininms@lebedev.ru*

Абстракт
В работе получено 2D уравнение путём редуцированного по долготе 3D уравнения модуляции для галактических космических лучей, которое, вследствие наличия дрейфового механизма, не сводится к обычному осесимметричному уравнению. В результате сформулировано осесимметричное уравнение со средней по долготе скоростью дрейфа, дополненное слагаемым, имеющим форму источника и пропорциональным дрейфовому коэффициенту.

На примере численного решения 3D уравнения модуляции для галактических протонов делается оценка точности источника 2D уравнения. Проводится обсуждение результатов и перспективы более адекватного учёта в 2D уравнении вклада дрейфов вдоль гелиосферного токового слоя в 3D уравнении.

Введение

Вопрос сравнительного анализа 2D и 3D решений уравнения модуляции (ТРЕ) для случая долгопериодических вариаций, когда решение рассматривается на временах, больших периода солнечного вращения, когда можно использовать средние по долготе за оборот модуляционные параметры, представляет интерес по двум причинам:

1) вследствие возможности разделения сложной 3D задачи на более простую с точки зрения решения и анализа 2D уравнения и уравнения первого порядка для трёхмерной добавки, решение которого также проще;

2) вторая причина заключается в сравнительной сложности численного решения 3D задачи, требующего большого объёма памяти и расчётного времени (расчётное время 3D задачи как минимум на порядок превосходит время решения 2D задачи). К этому следует добавить малость амплитуды долготных вариаций при коэффициентах ТРЕ не зависящих от долготы.

Всё вышеотмеченное в сильной степени нивелирует преимущества 3D подходов, когда все механизмы модуляции, включённые в ТРЕ работают «в полную силу».

Несмотря на то, что коэффициенты ТРЕ в 3D модельных задачах описания долгопериодических вариаций не зависят от долготы, вследствие наличия пространственного гелиосферного токового слоя (ГТС) его решение будет зависеть от всех пространственных переменных.

В этой работе приводятся результаты редукции 3D ТРЕ в 2D уравнение в частном случае осесимметричных коэффициентов. Результаты редукции проверяются на примере решения модельного 3D уравнения. Тема редукции 3D ТРЕ в 2D была впервые затронута в работе [1].

1. Уравнение модуляции

3D уравнение модуляции ГКЛ в современном представлении имеет вид [2]:

$$\partial N/\partial t - \nabla\cdot(\mathbf{K}^{(s)}\cdot\nabla N) + (\mathbf{V}+\mathbf{V}_\mathrm{d})\cdot\nabla N - (\nabla\cdot\mathbf{V}/3)(\partial N/\partial \ln p) = 0\,, \qquad (1)$$

где $N(\mathbf{r},p,t)$ является дифференциальной плотностью числа частиц с величиной импульса p, а интенсивность частиц $J(\mathbf{r},T,t) = N(\mathbf{r},p,t)p^2$, T – кинетическая энергия частиц. Все другие переменные мы определим кратко. $\mathbf{K}^{(s)}$ симметричный тензор диффузии в локальной системе координат (ЛСК) с осью $\mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{B}/B$, где $\mathbf{B}$ – вектор напряжённости ГМП, представляется двумя независимыми коэффициентами $K_{11} = K_{\|}$, $K_{22} = K_{33} = K_{\perp}$, скорость солнечного ветра (СВ) $\mathbf{V} = \mathrm{V}(r,\theta,t)\mathbf{e}_r$, скорость дрейфа $\mathbf{V}_\mathrm{d} = [\nabla, \Im(S) K_T \mathbf{n}_1]$, где $\Im(S)$ – знаковая функция, принимающая значение 1 при положительном аргументе и –1 при отрицательном, $K_T = sign(qA)\cdot(pv/3qB)$ – дрейфовый коэффициент, $A = \pm 1$ – знак ГМП в северном полушарии гелиосферы, q – её заряд. Аргумент знаковой функции можно взять уравнение поверхности $S(\mathbf{r},t) = 0$ ГТС, которая в гелиосфере определяет поверхность, на которой ГМП меняет знак. В простейшей модели, получившей название «модель наклонного токового слоя» (НТС) форма ГМП задаётся уравнением

$$\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\sin\tilde{\varphi} = 0\,,\ \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0 - \omega(t - \frac{r - r_S}{\mathrm{V}})\,,$$

ω – угловая скорость солнечного вращения, r_s – радиус поверхности источника гелиосферного магнитного поля (r_s =2.5–3 солнечных радиуса).

В некоторых случаях используется более лаконичная форма записи уравнения (1), особенно удобная при анализе относительных вкладов разных механизмов модуляции ГКЛ:

$$\partial N/\partial t - \nabla\cdot(\mathbf{K}\cdot\nabla N) + \mathbf{V}\cdot\nabla N - (\nabla\cdot\mathbf{V}/3)(\partial N/\partial \ln p) = 0\,,\ \mathbf{K} = \mathbf{K}^{(s)} + \mathbf{K}^{(a)}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{K}^{(a)}$ – антисимметричный тензор с ненулевыми компонентами $K_{23} = -K_{32} = K_T$.

Эквивалентность форм (1) и (1.1) следует из известных векторных тождеств

$$-\nabla(\mathbf{K}^{(a)}\nabla N) = \nabla(\mathrm{K}_T[\mathbf{n}_1, \nabla N]) = ([\nabla, \mathrm{K}_T\,\mathbf{n}_1], \nabla N) = (\mathbf{V}_\mathrm{d}, \nabla N).$$

2. Редуцированное уравнение модуляции

Представив трёхмерное решение в виде

$$N(r,\theta,\varphi,t) = U(r,\theta,t) + u(r,\theta,\varphi,t)\,, \nabla N = \nabla U + \nabla u$$

и усреднив уравнение (1) по полному периоду переменной φ приходим к равенству

$$\partial U/\partial t - \nabla\cdot(\mathbf{K}^{(s)}\cdot\nabla U) + (\mathbf{V} + \mathbf{V}_\mathrm{d}^{(a)})\cdot\nabla U - (\nabla\cdot\mathbf{V}/3)(\partial U/\partial \ln p) + Q(r,\theta,p,t) = 0\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{V}_\mathrm{d}^{(a)} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi}[\nabla, \Im(S(\mathbf{r},t))K_T\mathbf{n}_1]d\varphi' = [\nabla, F\,K_T\mathbf{n}_1]$ – полная средняя скорость дрейфа, включающая среднюю скорость дрейфа в ГТС [3,4] $F = (1/2\pi)\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\Im\,(S(\mathbf{r},t))d\varphi = \dfrac{2}{\pi}\arctan(ctg\alpha\, ctg\theta)$,

$$\Im(S(\mathbf{r},t)) = \begin{cases} 1, & S(\mathbf{r}) > 0 \\ 0, & S(\mathbf{r}) = 0 \\ -1, & S(\mathbf{r}) < 0 \end{cases},\ Q(r,\theta,p,t) = \nabla\cdot[K_T\mathbf{n}_1, \mathbf{f}^+]\,,\ \mathrm{f}_i^+ = \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1+2\pi}\nabla_i u\,d\varphi/\pi\,,\ \mathrm{f}_i^- = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\nabla_i u\,d\varphi/\pi\,.$$

К уравнению (2) следует добавить равенство

$$(\{(\mathbf{K}, \nabla N)^+ - (\mathbf{K}, \nabla N)^-\}, \mathbf{n}_2)_{\varphi_k} = 0\,,\ k = 1{,}2\,, \tag{2.1}$$

$\mathbf{K} = \mathbf{K}_S + \mathbf{K}_A$ – полный тензор диффузии, $\mathbf{n}_2$ – нормаль к поверхности ГТС в точке φ_k . Равенство (2.1) возникает из-за разрывности на ГТС диффузионно – дрейфовых потоков под знаком дивергенции в уравнении 1.1. Наиболее распространённая формулировка равенства (2.1): разность нормальных к ГТС диффузионных потоков в любой точке φ_k равна дрейфовому потоку вдоль ГТС.

$$\left(\mathbf{K}_S\cdot[(\nabla u)^+ - (\nabla u)^-]\right)\cdot\mathbf{n}_2 = -2K_T\left(\nabla U + (\nabla u)^+ + (\nabla u)^-\right)\cdot\mathbf{n}_3\,. \tag{2.2}$$

Выражение (2.1) используется для определения неизвестной функции $\mathbf{f}^+$ в выражении для источника в уравнении (2). Сложив выражения (2.2) для точек пересечения ГТС 1 и 2 и проинтегрировав по секторам с делением на интервал интегрирования, приходим к уравнению для $\mathbf{f}^+$:

$$\mathbf{f}^+ + \eta_i F[\mathbf{n}_1\times\mathbf{f}^+] = (1 - F^2)\eta_i[\mathbf{n}_1\times\nabla U],\ \eta_i = K_T\mathbf{K}_S^{-1},\ i = 1 - 3\,. \tag{2.3}$$

Решение этого уравнения, полученное методом итераций до второго порядка точности, даётся выражением

$$\mathbf{f}^+ = (1 - F^2)\eta_i\,\{1 - \eta_i F[\mathbf{n}_1,\}[\mathbf{n}_1, \nabla U]\,,\ \mathbf{f}^- = -\mathbf{f}^+\,. \tag{2.4}$$

В заключении этого раздела отметим, что как исходное равенство (2.1), так и уравнение (2.3) могут быть записаны в эквивалентной форме, если воспользоваться представлением вектора $\mathbf{f}^+$, следующем из его определения

$$\mathbf{f}^+ = \nabla\phi + [(u_1\mathbf{n}_2)_{\varphi_1} + (u_2\mathbf{n}_2)_{\varphi_2}]|\nabla S|\,,\ \phi = \phi(r,\theta,p,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1+2\pi}u\,d\varphi\,,$$

где u_1 и u_2 значения вариации u на ГТС:

$$\mathbf{f}^+\cdot\nabla F = (1 - F^2)\eta_i\left\{[\mathbf{n}_1, \nabla U]\cdot\nabla F + \mathbf{n}_1\cdot[\nabla, \mathbf{f}^+]\right\}. \tag{2.5}$$

Уравнением (2.5) мы воспользуемся в следующем разделе при оценке источника $Q(r,\theta,p,t)$.

3. Оценка источника на примере решения 3D уравнения

Знание решения для вектора $\mathbf{f}^+$ позволяет выразить источник Q в уравнении (2) через усреднённую функцию распределения U и замкнуть уравнение (2). Расписав выражение для источника в виде

$Q = \nabla \cdot (K_T \mathbf{n}_1 \times \mathbf{f}^+) = \mathbf{V}_d^{(r)} \cdot \mathbf{f}^+ - K_T \mathbf{n}_1 \cdot [\nabla, \mathbf{f}^+]$ и, выразив $K_T \mathbf{n}_1 \cdot [\nabla, \mathbf{f}^+]$ из соотношения (2.5), запишем результат в виде: $\mathbf{V}_d^{(r)} \cdot \mathbf{f}^+ + \{K_S^{(ii)} \mathbf{f}^+ - (1-F^2) K_T [\mathbf{n}_1, \nabla U]\} \cdot \nabla F$. Для наших целей достаточно первого приближения для $\mathbf{f}^+$. Тогда

$$Q = (1-F^2)\,\eta_i \{\mathbf{V}_d^{(r)} - \nabla F \cdot (K_S^{(ii)} - K_T)\}[\mathbf{n}_1, \nabla U]. \qquad (3.1)$$

Если исходить из определения источника в процедуре усреднения ТРЕ, то $Q' = \left\langle [\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_\mathrm{d}^{(a)}][\nabla N - \nabla U] \right\rangle_\varphi$, где квадратные скобки обозначают усреднение по долготе. Другой, подходящей для проверки величиной, является $\Pi' = \left\langle \mathbf{V}_d \nabla N \right\rangle_\varphi$, которая может сравниваться с величиной $\Pi = Q + \mathbf{V}_\mathrm{d}^{(a)} \cdot \nabla U$, где $U = \left\langle N \right\rangle_\varphi$. В работе [5] на основе 3D модели, представленной в статье [6] с модифицированным согласно [7] гелиосферным магнитным полем. Обе эти величины сравнивались с их теоретическими значениями на всей расчётной сетке. Поскольку Π' и Π представляют сумму средних скалярных произведений r и θ компонент, которые считались отдельно, то их значения для первой координаты только качественно согласуются друг с другом, для θ – компоненты нет не только количественного, но и качественного согласия.

[***Примечание***. *Вектор* $\mathbf{f}^+$ *в работе [5] отличался от содержащегося в выражении (4) и задавался в виде* $\mathbf{f}^+ = \sqrt{1-F^2}\, \arcsin F \cdot \nabla U]$. *Это выражение было получено из решения уравнения (2.5) при дополнительном условии* $\mathbf{K} \cdot \mathbf{f}^\pm = 0$, *где* $\mathbf{K}$ *– полный тензор диффузии.*]

Сравнение выражения для Q, задаваемого в (3.1), с Q', полученным из решения 3D задачи пока не проводилось вследствие несоответствия величины K_T в (3.1) и соответствующего коэффициента в 3D модели (см. следующий раздел).

4. Обсуждение и заключение

Расхождение вкладов в дрейфы в 2D модели и усреднённом по долготе вкладом 3D модели можно объяснить (возможно частично) тем, что при усреднении уравнения (1) знаковая функция $\Im$ выбиралась в виде «ступеньки», она скачком изменялась от 1 до -1 и наоборот (см. в разд. 2). При расчётах в 3D модели вследствие конечности ларморовского радиуса R_L дрейф частиц вдоль ГТС начинается на расстоянии 2 R_L по обе стороны от него, и скорость дрейфа возрастает при приближении к ГТС (на котором $\Im$ равно нулю). Это придаёт гелиосферному токовому слою конечную толщину, зависящую от жёсткости частиц. Поэтому знаковая функция, стоящая перед дрейфовым коэффициентом K_T и задающая скорость дрейфа в ГТС, $\mathbf{V}_d^{(cs)} = [\nabla \Im, K_T \mathbf{n}_1]$, выбирается в виде плавной функции $\sim \tanh(x_2 / 2R_L)$, где x_2 – нормальная к ГТС координата. Значит, в полосе шириной 4 R_L знаковая функция $\Im$ будет зависеть от долготы, и в левой части равенства (2.1) при усреднении по долготе перед K_T будет стоять множитель $\sim \tanh(x_2 / 2R_L)$, что серьёзно усложняет процедуру усреднения (3.1). Интегрирование по любому сектору даст кроме $\mathbf{f}^\pm$ сумму интегралов:

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi'_k} [\tanh(x_2(\varphi)/2R_L) - 1](\nabla_i u)^\pm d\varphi + \int_{\varphi_{k+1}-\varphi'_{k+1}}^{\varphi_{k+1}} [\tanh(x_2(\varphi)/2R_L) - 1](\nabla_i u)^\pm d\varphi,$$

где φ'_k и φ'_{k+1}, k=1,2 – значения долгот, при которых $\tanh(x_2(\varphi)/2R_L)$ принимает значение 1. Каждый из этих интегралов необходимо представить в виде $[C(r,\theta,p) - (\varphi'_k - \varphi_k)]\mathrm{f}_i^-$. В 3D моделях интегралы такого рода оцениваются численно в процессе решения, а для наших целей они должны быть известны на этапе усреднения ТРЕ и в данной работе полностью игнорировались.

Отметим также, что более общий случай долготной зависимости коэффициентов ТРЕ, ориентированный на описание 27-дневных вариаций космических лучей, также поддаётся решению в рамках кратко описанного выше формализма. В этом случае усреднение уравнения (1) не может быть проведено точно, однако равенство (2.2) и соответствующее ему после усреднения уравнение (2.5) остаются в силе. Однако параметр $\eta_i = K_T \mathbf{K}_S^{-1}$ теперь должен быть заменён на средние по секторам значения.

Литература

[1] Kalinin M.S. and Krainev M.B., Geomag. & Aeron., Pleiades Publishing, Ltd. 54, 4, 423, 2014.
[2] Parker E.N., Planet. Space Sci., 13, 9, 1965.
[3] Hattingh M. and Burger R.A., Adv. Space Res., 16, 213, 1995.
[4] Kalinin M.S. and Krainev M.B., Proc. 24th ICRC (Rome), 4, 688, 1995.
[5] Kalinin M.S., Gvozdevsky B.B., Krainev M.B., et al., On the transition from 3D to 2D transport equations for a study of long-term cosmic-ray intensity variations in the heliosphere. Proc. 37th ICRC (Berlin), 2021, in print.
[6] Bisschoff D., Potgieter M.S., and Aslam O.P.M., Astrophys. J., 878:59, 2019.
[7] Smith C.W. and Bieber J.W., Astrophys. J., 370, 435, 1991.