ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ПЛАНЕТНЫХ АТМОСФЕР НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

И. В. Мингалев

Полярный геофизический институт Кольского НЦ РАН

- *Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Коньшин В. Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, С. 594.
- *Гущин В. А., Матюшин П. В.* Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37, № 9. С. 1122–1137.
- *Гущин В. А., Матюшин П. В.* Классификация режимов отрывных течений жидкости около сферы при умеренных числах Рейнольдса // Математическое моделирование: проблемы и результаты, М.: "Наука С. 199–235, 2003.
- *Гущин В. А., Матюшин П. В.* Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 5–20.
- *Гущин В. А., Матюшин П. В.* Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при $200 < \mathrm{Re} < 380$ // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 135–151.

Гибридная схема для 1-мерного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{— одномерное модельное уравнение}$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - v_i\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right)\Delta t/\Delta x,$$

$$\alpha = (1 - |v_i|\,\Delta t/\Delta x)/2$$

$$f_{i+1/2}^n = f_i^n + \alpha\,(\Delta f)_i \quad \text{при} \quad v_i \geq 0,$$

$$f_{i+1/2}^n = f_{i+1}^n - \alpha\,(\Delta f)_{i+1} \quad \text{при} \quad v_i < 0,$$

$$\text{где } (\Delta f)_i = \begin{cases} f_i^n - f_{i-1}^n & \text{при} \quad \left|f_i^n - f_{i-1}^n\right| \leq \left|f_{i+1}^n - f_i^n\right|, \\ f_{i+1}^n - f_i^n & \text{при} \quad \left|f_i^n - f_{i-1}^n\right| > \left|f_{i+1}^n - f_i^n\right|, \end{cases}$$

$$(\Delta f)_{i+1} = \begin{cases} f_{i+2}^n - f_{i+1}^n & \text{при} \quad \left|f_{i+2}^n - f_{i+1}^n\right| \leq \left|f_{i+1}^n - f_i^n\right|, \\ f_{i+1}^n - f_i^n & \text{при} \quad \left|f_{i+2}^n - f_{i+1}^n\right| > \left|f_{i+1}^n - f_i^n\right|. \end{cases}$$

Модификация гибридной схемы

$$f^n_{i+1/2} = f^n_i + \alpha\,(\Delta f)_i \quad \text{при} \quad v_i \geq 0,$$

$$f^n_{i+1/2} = f^n_{i+1} - \alpha\,(\Delta f)_{i+1} \quad \text{при} \quad v_i < 0,$$

$$\text{где } (\Delta f)_i = \begin{cases} f^n_i - f^n_{i-1} & \text{при} \quad \left|f^n_i - f^n_{i-1}\right| = M^- \\ f^n_{i+1} - f^n_i & \text{при} \quad \left|f^n_{i+1} - f^n_i\right| = M^- \\ (f^n_{i+1} - f^n_{i-1})/2 & \text{при} \quad \left|f^n_{i+1} - f^n_{i-1}\right|/2 = M^- \end{cases}$$

$$M^- = min\left\{\left|f^n_i - f^n_{i-1}\right|, \left|f^n_{i+1} - f^n_i\right|, \left|f^n_{i+1} - f^n_{i-1}\right|/2\right\},$$

$$(\Delta f)_{i+1} = \begin{cases} f^n_{i+2} - f^n_{i+1} & \text{при} \quad \left|f^n_{i+2} - f^n_{i+1}\right| = M^+ \\ f^n_{i+1} - f^n_i & \text{при} \quad \left|f^n_{i+1} - f^n_i\right| = M^+ \\ (f^n_{i+2} - f^n_i)/2 & \text{при} \quad \left|f^n_{i+2} - f^n_i\right|/2 = M^+ \end{cases}$$

$$M^+ = min\left\{\left|f^n_{i+2} - f^n_{i+1}\right|, \left|f^n_{i+1} - f^n_i\right|, \left|f^n_{i+2} - f^n_i\right|/2\right\}.$$

- *Опарин А. М.* Численное моделирование проблем, связанных с интенсивным развитием гидродинамических неустойчивостей // Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительный эксперимент, результаты. М.: Наука, 2000.
- *Белоцерковский О. М., Крагинский Л. М., Опарин А. М.* Численное моделирование пространственных течений в стратифицированной атмосфере, вызванных сильными крупномасштабными возмущениями // ЖВМ и МФ. 2003. Т. 43, № 11. С. 1744–1758.

Система уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho\,\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = \left(-\nabla p + \operatorname{div}\widehat{\mathcal{T}}\right) + \rho\,\mathbf{F}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\left((E+p)\,\mathbf{v}\right) = (\rho\,\mathbf{v},\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\widehat{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{j}) + Q$$

где обозначено: $p = \rho\,R\,T$ — давление, R — постоянная атмосферного газа, $\widehat{\mathcal{T}}$ — тензор вязких напряжений, Q — объемная мощность нагрева/охлаждения за счет поглощения/испускания электромагнитного излучения, $\mathbf{F}$ — ускорение внешних сил, которое складывается из ускорений силы тяжести, силы Кориолиса и центробежной силы

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}\,\left(\mathbf{\Omega}^2 - g_0\,r_{\text{пов}}^2/r^3\right) - \mathbf{\Omega}\,(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) + 2\,[\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}]$$

Обобщение схемы на нерегулярную сетку

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} = \mathbf{R} + \frac{\partial \mathbf{X}_\nu}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}_\nu}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}_\nu}{\partial z},$$

где $\mathbf{Q}$ — вектор консервативных переменных, x, y, z — декартовы координаты, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ — вектора потоков в направлении координатных осей:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ w_x \\ w_y \\ w_z \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_x^2/\rho + p \\ w_y\, w_x/\rho \\ w_z\, w_x/\rho \\ h\, w_x \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} w_y \\ w_x\, w_y/\rho \\ w_y^2/\rho + p \\ w_z\, w_y/\rho \\ h\, w_y \end{pmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} w_z \\ w_x\, w_z/\rho \\ w_y\, w_z/\rho \\ w_z^2/\rho + p \\ h\, w_z \end{pmatrix},$$

где обозначено: $h = (E + p)/\rho$,

$p = (\gamma - 1)\left(E - \mathbf{w}^2 / (2\,\rho)\right)$ — давление.

$\mathbf{R}$ — вектор правых частей уравнений:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\, F_x \\ \rho\, F_y \\ \rho\, F_z \\ (\mathbf{w},\, \mathbf{F}) + Q \end{pmatrix}, \ \mathbf{X}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_{xx} \\ \Pi_{xy} \\ \Pi_{xz} \\ \Pi_{xx}\, v_x + \Pi_{xy}\, v_y + \Pi_{xz}\, v_z - j_x \end{pmatrix},$$

В этих формулах обозначено: ρ — плотность газа, $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость, v_x, v_y, v_z — ее компоненты в декартовых координатах, $\mathbf{w} = \rho\, \mathbf{v}$ — плотность импульса, w_x, w_y, w_z — ее компоненты, j_x, j_y, j_z — компоненты вектора потока тепла, Π_{xx}, Π_{yy}, Π_{zz}, Π_{xy}, Π_{xz}, Π_{yz} — компоненты тензора вязких напряжений.

$$\mathbf{Y}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_{xy} \\ \Pi_{yy} \\ \Pi_{yz} \\ \Pi_{xy}\, v_x + \Pi_{yy}\, v_y + \Pi_{yz}\, v_z - j_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_{xz} \\ \Pi_{yz} \\ \Pi_{zz} \\ \Pi_{xz}\, v_x + \Pi_{yz}\, v_y + \Pi_{zz}\, v_z - j_z \end{pmatrix},$$

Применяя метод конечного объема для аппроксимации пространственных производных потоков в левой части системы получим:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z}\right)_{\mathbf{k}}=\frac{1}{V_{\mathbf{k}}}\sum_{\mu}\int\limits_{G_{\mathbf{k},\,\mu}}\left(\mathbf{X}\,n_x+\mathbf{Y}\,n_y+\mathbf{Z}\,n_z\right)dS.$$

Заменяя в последнем равенстве интеграл по грани контрольного объема на произведение площади этой грани и значения подынтегральной функции в центре грани, можно получить явную разностную схему:

$$\frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^{m+1}-\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^{m}}{\Delta t}\;+\;\frac{1}{V_{\mathbf{k}}}\sum_{\mu}S_{\mathbf{k},\,\mu}\left(\mathbf{F}_{\mu}^{m}-\mathbf{U}_{\mu}^{m}\right)\;=\;\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{m},$$

где $\mathbf{F}_{\mu}^{m}=\mathbf{X}^{m}\,n_x+\mathbf{Y}^{m}\,n_y+\mathbf{Z}^{m}\,n_z,\;\mathbf{U}_{\mu}^{m}=\mathbf{X}_{\nu}^{m}\,n_x+\mathbf{Y}_{\nu}^{m}\,n_y+\mathbf{Z}_{\nu}^{m}\,n_z$.

Рассмотрим переход к новой системе координат. Ее оси обозначим через ξ, η, ζ. Обозначим через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ и через $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ направляющие векторы осей исходной и новой систем координат.

Если $n_x = 1$, то положим $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$.

Если $n_x = -1$, то положим $\xi = -x$, $\eta = -y$, $\zeta = z$.

Если $|n_x| < 1$, то положим $\mathbf{e}_\xi = \mathbf{n}_\mu$, $\mathbf{e}_\zeta = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}_\mu]/\delta$, $\mathbf{e}_\eta = [\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{n}_\mu]$, где $\delta = |[\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}_\mu]| = \sqrt{1 - n_x^2}$.

Компоненты плотности импульса определяются по формулам

$$\begin{pmatrix} w_\xi \\ w_\eta \\ w_\zeta \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}, \text{ где } \widehat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ -\delta & n_x\, n_y/\delta & n_x\, n_z/\delta \\ 0 & -n_z/\delta & n_y/\delta \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{\mathbf{M}}^{-1} = \widehat{\mathbf{M}}^T$ ($\widehat{\mathbf{M}}$ — матрица поворота).

При переходе от системы координат $x\,y\,z$ к системе $\xi\,\eta\,\zeta$ вектор $\mathbf{F}_\mu$ и вектор консервативных переменных $\mathbf{Q}$ переходят в векторы

$$\mathbf{P} = \widehat{\omega}_\mu\,\mathbf{F}_\mu = \begin{pmatrix} w_\xi \\ w_\xi^2/\rho + p \\ w_\xi\,w_\eta/\rho \\ w_\xi\,w_\zeta/\rho \\ (E+p)\,w_\xi\,/\rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \widehat{\omega}_\mu\,\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ w_\xi \\ w_\eta \\ w_\zeta \\ E \end{pmatrix},$$

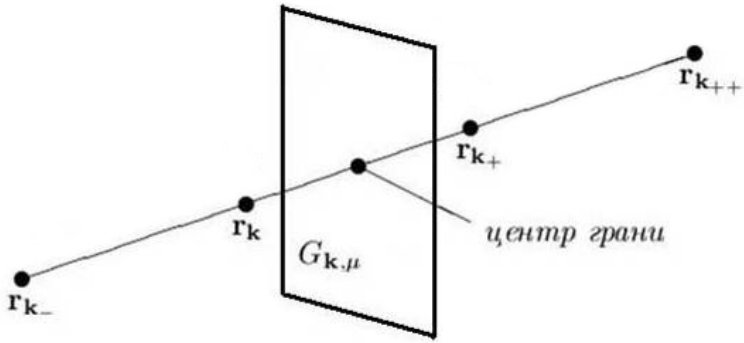
где ортогональная матрица перехода $\widehat{\omega}_\mu$ задана формулой

$$\widehat{\omega}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & -\delta & n_x\,n_y/\delta & n_x\,n_z/\delta & 0 \\ 0 & 0 & -n_z/\delta & n_y/\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\widehat{\omega}_\mu^{-1} = \widehat{\omega}_\mu^T\right).$$

Рассмотрим матрицу Якоби $\widehat{\mathbf{A}}_\mu = \dfrac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}}$.

Эту матрицу можно представить в виде $\widehat{\mathbf{A}}_\mu = \widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu^{-1} \widehat{\mathbf{\Lambda}}_\mu \widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu$, где $\widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu^{-1}$ и $\widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu$ — матрицы правых и левых собственных векторов. $\widehat{\mathbf{\Lambda}}_\mu$ — диагональная матрица, по диагонали которой стоят собственные числа матрицы $\widehat{\mathbf{A}}_\mu$:

$$\lambda_1 = v_\xi - c\,, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = v_\xi\,, \quad \lambda_5 = v_\xi + c\,,$$



Будем использовать векторы характеристических переменных в узлах $\mathbf{r_k}$ и $\mathbf{r}^+$ и их разность:

$$\mathbf{H}^0 = \widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu \, \widehat{\omega}_\mu \, \mathbf{Q_k} = \left(H_1^0 \, , \, H_2^0 \, , \, H_3^0 \, , \, H_4^0 \, , \, H_5^0 \right)^T ,$$

$$\mathbf{H}^+ = \widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu \, \widehat{\omega}_\mu \, \mathbf{Q}^+ = \left(H_1^+ \, , \, H_2^+ \, , \, H_3^+ \, , \, H_4^+ \, , \, H_5^+ \right)^T ,$$

$$\Delta \mathbf{H}^{\text{Ц}} = \mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^0 = \left(\Delta H_1^{\text{Ц}} , \, \Delta H_2^{\text{Ц}} , \, \Delta H_3^{\text{Ц}} , \, \Delta H_4^{\text{Ц}} , \, \Delta H_5^{\text{Ц}} \right)^T ,$$

где $\mathbf{Q_k}$ и $\mathbf{Q}^+$ — значения вектора $\mathbf{Q}$ в узлах $\mathbf{r_k}$ и $\mathbf{r}^+$.

Введем векторы односторонних приращений характеристических переменных в узлах сетки $\mathbf{r_k}$ и $\mathbf{r}^+$ $(\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}^+ - \mathbf{r_k})$:

$$\Delta \mathbf{H}^{\text{Л}} = \widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu \, \widehat{\omega}_\mu \, \left(\Delta \mathbf{r}, \left(\nabla^{\text{Л}} \mathbf{Q} \right)^- \right), \quad \Delta \mathbf{H}^{\text{П}} = \widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu \, \widehat{\omega}_\mu \, \left(\Delta \mathbf{r}, \left(\nabla^{\text{П}} \mathbf{Q} \right)^+ \right),$$

где $(\nabla^{\text{Л}} \mathbf{Q})^-$ — тензор градиента вектора $\mathbf{Q}$, вычисленный в полуцелом узле между $\mathbf{r}^-$ и $\mathbf{r_k}$, $(\nabla^{\text{П}} \mathbf{Q})^+$ — тензор градиента вектора $\mathbf{Q}$, вычисленный в полуцелом узле между $\mathbf{r}^+$ и $\mathbf{r}^{++}$.

Введем вектор характеристических переменных в центре грани $G_{\mathbf{k},\,\mu}$: $\mathbf{H}_\mu = \left(\widetilde{H}_1\,,\,\widetilde{H}_2\,,\,\widetilde{H}_3\,,\,\widetilde{H}_4\,,\,\widetilde{H}_5\right)^T$, компоненты которого будем вычислять в зависимости от знака диагональных элементов матрицы $\widehat{\mathbf{\Lambda}}_\mu$ по формулам

$$\widetilde{H}_i = H_i^0 + \alpha_i\,\beta^- \qquad \text{при} \quad \widetilde{\lambda}_i \geq 0,$$

$$\widetilde{H}_i = H_i^+ - \alpha_i\,\beta^+ \qquad \text{при} \quad \widetilde{\lambda}_i < 0, \qquad \alpha_i = (1 - \Delta t\,|\widetilde{\lambda}_i|/|\Delta\mathbf{r}|)/2$$

Параметры β^- и β^+ определяются по формулам

$$\beta^- = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\Delta H_i^{\text{Л}} + \Delta H_i^{\text{Ц}}\right) & \text{при} \quad \dfrac{1}{2}\left|\Delta H_i^{\text{Л}} + \Delta H_i^{\text{Ц}}\right| = M^-\,, \\ \Delta H_i^{\text{Л}} & \text{при} \quad |\Delta H_i^{\text{Л}}| = M^-, \\ \Delta H_i^{\text{Ц}} & \text{при} \quad \left|\Delta H_i^{\text{Ц}}\right| = M^-, \end{cases}$$

$$\text{где} \quad M^- = min\left\{\left|\Delta H_i^{\text{Ц}}\right|,\,\left|\Delta H_i^{\text{Л}}\right|,\,\frac{1}{2}\left|\Delta H_i^{\text{Л}} + H_i^{\text{Ц}}\right|\right\},$$

$$\beta^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\Delta H_i^{\text{п}} + \Delta H_i^{\text{ц}}\right) & \text{при} \quad \dfrac{1}{2}\left|\Delta H_i^{\text{п}} + \Delta H_i^{\text{ц}}\right| = M^+, \\ \Delta H_i^{\text{п}} & \text{при} \quad |\Delta H_i^{\text{п}}| = M^+, \\ \Delta H_i^{\text{ц}} & \text{при} \quad \left|\Delta H_i^{\text{ц}}\right| = M^+, \end{cases}$$

$$\text{где} \quad M^+ = min\left\{\left|\Delta H_i^{\text{ц}}\right|, \left|\Delta H_i^{\text{п}}\right|, \frac{1}{2}\left|\Delta H_i^{\text{п}} + H_i^{\text{ц}}\right|\right\}.$$

Вектор потоков $\mathbf{F}_\mu^m$ в центре грани $G_{\mathbf{k},\,\mu}$ в исходной системе координат $x\,y\,z$ будем вычислять по формуле

$$\mathbf{F}_\mu^m = \widehat{\omega}_\mu^{-1}\,\widehat{\mathbf{\Omega}}_\mu^{-1}\,\widehat{\mathbf{\Lambda}}_\mu\,\mathbf{H}_\mu\,.$$

Система уравнений динамики смеси воздуха и водяного пара при наличии аэрозолей из воды и льда

Будем рассматривать земной атмосферный газ как смесь воздуха и водяного пара, в которой могут присутствовать аэрозоли двух видов: первый состоит из микрокапель воды, а второй — из микрочастиц льда. Считаем микрокапли воды и микрочастицы льда сферами радиусов 0.1 мм и 0.03 мм, соответственно, движущимися относительно смеси воздуха и водяного пара со скоростями осаждения во внешнем силовом поле $\mathbf{v}_{\text{вод}}^{\text{ос}}$ и $\mathbf{v}_{\text{л}}^{\text{ос}}$, определяемыми по формуле Стокса с поправкой Каннигэма. Выбранные размеры частиц аэрозолей соответствуют реальным средним размерам частиц в облаках. Температуру смеси и частиц аэрозолей считаем одинаковой.

Обозначения: T — температура, $\rho_{\text{воз}}$ и $\rho_{\text{п}}$ — соответственно, плотности воздуха и водяного пара, $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость смеси, $\rho_{\text{вод}}$ и $\rho_{\text{л}}$ — общая масса в единице объема, соответственно, водяных капель и микрочастиц льда.

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{воз}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}(\rho_{\text{воз}}\,\mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial\,(\rho_{\text{п}} + \rho_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}})}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\rho_{\text{п}}\,\mathbf{v} + \rho_{\text{вод}}\,\big(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big) + \rho_{\text{л}}\,(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial\,\Big(\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v} + \rho_{\text{вод}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big) + \rho_{\text{л}}\,(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\Big)}{\partial\,t} +$$

$$+\operatorname{div}\Big(\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}+\rho_{\text{вод}}\big(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big)\otimes\big(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big) + \rho_{\text{л}}(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\otimes(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\Big) =$$

$$= -\nabla p + \operatorname{div}\widehat{\mathcal{T}} + (\rho_{\text{воз}} + \rho_{\text{п}} + \rho_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}})\,\mathbf{F},$$

$$\frac{\partial\,E}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(E_{\text{см}}\,\mathbf{v} + E_{\text{вод}}\,(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}) + E_{\text{л}}\,(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\Big) =$$

$$= \Big(\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v} + \rho_{\text{вод}}(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}) + \rho_{\text{л}}(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}),\ \mathbf{F}\Big) + \operatorname{div}(\widehat{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{v} - p\,\mathbf{v} - \mathbf{j}) + Q$$

$$E = E_{\text{см}} + E_{\text{вод}} + E_{\text{л}}\,, \qquad E_{\text{л}} = \rho_{\text{л}}\left((\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{л}}^{\text{ос}})^2/2 + C_{\text{л}}\,T\right),$$

$$E_{\text{вод}} = \rho_{\text{вод}}\left((\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{вод}}^{\text{ос}})^2/2 + C_{\text{вод}}\,(T - T_0) + q_{\text{пл}} + C_{\text{л}}\,T_0\right),$$

$$E_{\text{см}} = \rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}^2/2 + 3\,p/2 + \rho_{\text{п}}\left(q_{\text{исп}}^0 + q_{\text{пл}} + C_{\text{л}}\,T_0 - 3\,R_{\text{п}}\,T_0/2\right).$$

Послойный переход по времени осуществлялся в два этапа. На первом этапе рассчитывались потоки через грани контрольных объемов узлов сетки массы воздуха, импульса, полной энергии, а также потоки массы водяного пара и потоки массы микрочастиц из воды и льда без учета фазовых переходов. Затем вычислялись масса воздуха, импульс, полная энергия и масса воды во всех фазовых состояниях в контрольных объемах узлов сетки на новом временном слое. На втором этапе в контрольных объемах узлов сетки при помощи уравнения состояния определялись температура и распределение воды между фазовыми состояниями, то есть на этом этапе учитывались фазовые переходы воды.

На первом этапе уравнение баланса содержания воды во всех фазовых состояниях заменялось на уравнения

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{вод}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\,\rho_{\text{вод}}\,\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{л}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\,\rho_{\text{л}}\,\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{п}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}\left(\,\rho_{\text{п}}\,\mathbf{v}\,\right) = 0.$$

Уравнение баланса импульса смеси заменялось на уравнения

$$\frac{\partial\left(\rho_{\text{вод}}\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\right)}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\rho_{\text{вод}}\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\otimes\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\rho_{\text{л}}\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\right)}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\rho_{\text{л}}\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\otimes\left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}\right)}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\Big) = -\nabla p + \operatorname{div}\widehat{\mathcal{T}} + \left(\rho_{\text{см}} + \rho_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}}\right)\mathbf{F}.$$

Уравнение для полной энергии заменялось на уравнения

$$\frac{\partial E_{\text{вод}}}{\partial t} + \operatorname{div}\Big(E_{\text{вод}}\,(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}})\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial E_{\text{л}}}{\partial t} + \operatorname{div}\Big(E_{\text{л}}\,(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial E_{\text{см}}}{\partial t} + \operatorname{div}\,(E_{\text{см}}\,\mathbf{v}) = \Big(\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v} + \rho_{\text{вод}}(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}) + \rho_{\text{л}}(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}),\,\mathbf{F}\Big) +$$

$$+\operatorname{div}(\,\widehat{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{v} - p\,\mathbf{v} - \mathbf{j}\,) + Q\,,$$

где обозначено: $\rho_{\text{см}} = \rho_{\text{воз}} + \rho_{\text{п}}$,

$p = (\rho_{\text{воз}}\,R_{\text{воз}} + \rho_{\text{п}}\,R_{\text{п}})\,T$ — давление смеси,

$R_{\text{воз}}$ — газовая постоянная воздуха,

$R_{\text{п}}$ — газовая постоянная водяного пара,

$\widehat{\mathcal{T}}$ — тензор вязких напряжений.

На втором этапе температура T и плотности $\rho_{\text{п}}$, $\rho_{\text{вод}}$ и $\rho_{\text{л}}$ определялись значениями $\rho_{\text{воз}}$, суммы $\rho_{\text{п}} + \rho_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}}$, и объемной плотности внутренней энергии среды

$$W = E - \left(\rho_{\text{см}} \mathbf{v}^2 + \rho_{\text{вод}} (\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}})^2 + \rho_{\text{л}} (\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})^2 \right) / 2$$

при помощи 4-х условий: $\rho_{\text{п}} \leq \rho_{\text{п}}^{max}(T)$; $\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{п}}^{max}(T)$ при $\rho_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}} > 0$; $\rho_{\text{вод}} = 0$ при $T < T_0$; $\rho_{\text{л}} = 0$ при $T > T_0$.

Зависимость плотности насыщенного пара $\rho_{\text{п}}^{max}$ от температуры задается уравнением

$$\rho_{\text{п}}^{max}(T) = \Big(T/T_0\Big)^a \exp\Big(b\,(T-T_0)/(T\,T_0)\Big)\; p_0^{max}/(R_{\text{п}}\,T)\,,$$

где p_0^{max} — давление насыщенного пара при $T = T_0$, а параметры a и b определяются по формулам:

при $T \geq T_0$

$$a = (3/2 - C_{\text{вод}}/R_{\text{п}})\,, \quad b = \Big(\,q_{\text{исп}}^0 - T_0\,(3\,R_{\text{п}}/2 - C_{\text{вод}})\Big)\,/R_{\text{п}}\,,$$

при $T < T_0$

$$a = (3/2 - C_{\text{л}}/R_{\text{п}})\,, \quad b = \Big(\,q_{\text{исп}}^0 + q_{\text{пл}} - T_0\,(3\,R_{\text{п}}/2 - C_{\text{л}})\Big)\,/R_{\text{п}}\,,$$

где $R_{\text{п}}$ — газовая постоянная водяного пара, $q_{\text{исп}}^0$ — удельная теплота испарения воды при $T = T_0$, $q_{\text{пл}}$ — удельная теплота плавления льда при $T = T_0$, а $C_{\text{вод}}$ и $C_{\text{л}}$ — удельные теплоемкости воды и льда, которые считаются постоянными.